8. Limita posloupnosti

Příklady

① V posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, kde $a_n = \dfrac{(-1)^n + n}{2n}$, určete

a) prvních 6 členů a zakreslete v soustavě souřadnic

$$a_1 = \frac{(-1)^1 + 1}{2 \cdot 1} = \frac{-1+1}{2} = 0$$

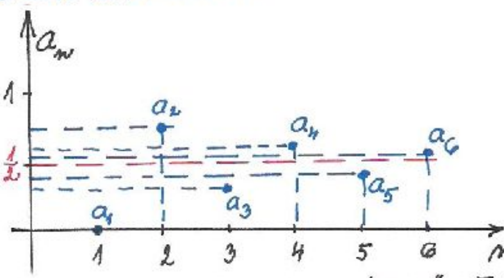
$$a_2 = \frac{(-1)^2 + 2}{2 \cdot 2} = \frac{1+2}{4} = \frac{3}{4} \quad (= 0{,}75)$$

$$a_3 = \frac{(-1)^3 + 3}{2 \cdot 3} = \frac{-1+3}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \quad (\doteq 0{,}3)$$

$$a_4 = \frac{(-1)^4 + 4}{2 \cdot 4} = \frac{1+4}{8} = \frac{5}{8} = (0{,}625)$$

$$a_5 = \frac{(-1)^5 + 5}{2 \cdot 5} = \frac{-1+5}{10} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5} \doteq 0{,}4$$

$$a_6 = \frac{(-1)^6 + 6}{2 \cdot 6} = \frac{1+6}{12} = \frac{7}{12} \doteq 0{,}51$$



- ČLENY SE STÁLE VÍCE PŘIBLIŽUJÍ k číslu $\frac{1}{2}$
- VZDÁLENOST členu od $\frac{1}{2}$ je $|a_n - \frac{1}{2}|$ a s rostoucím n se zmenšuje

b) od kterého $n \in N$ bude vzd. členu od $\frac{1}{2}$ (tj: $|a_n - \frac{1}{2}|$) menší než nějaké číslo ε (např. $\frac{1}{12}$, 10^{-3}, ...)

tj: $|a_n - \frac{1}{2}| < \varepsilon$

pro $\varepsilon = \frac{1}{12}$

$$\left|a_n - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{12}$$

$$\left|\frac{(-1)^n + n}{2n} - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{12}$$

$$\left|\frac{(-1)^n + n - n}{2n}\right| < \frac{1}{12}$$

$$\left|\frac{(-1)^n}{2n}\right| < \frac{1}{12}$$

$$\frac{|(-1)^n|}{|2n|} < \frac{1}{12}$$

$$\frac{1}{2n} < \frac{1}{12}$$

$$12 < 2n$$

$n > 6$, tj. od $n = 7$

pro $\varepsilon = 10^{-3}$

$$\left|a_n - \frac{1}{2}\right| < 10^{-3}$$

$$\vdots$$

$$\frac{1}{2n} < 10^{-3}$$

$$1 < 2n \cdot 10^{-3}$$

$$n > \frac{1}{2 \cdot 10^{-3}}$$

$$n > \frac{1}{2} \cdot 10^{+3}$$

$n > 500$, tj. od $n = 501$

PLATÍ:

$\forall n \geq 7, n \in N: |a_n - \frac{1}{2}| < \frac{1}{12}$

$\forall n \geq 501, n \in N: |a_n - \frac{1}{2}| < 10^{-3}$

c) zda existuje $n_0 \in N$ tak, aby pro $\forall n \in N, n \geq n_0: |a_n - \frac{1}{2}| < 10^{-6}$

$$\left|a_n - \frac{1}{2}\right| < 10^{-6}$$

$$\vdots$$

$$\frac{1}{2n} < 10^{-6}$$

$$1 < 2n \cdot 10^{-6}$$

$$n > \frac{1}{2 \cdot 10^{-6}}$$

$$n > \frac{1}{2} \cdot 10^{6}$$

$$n > 500\,000$$

$\Rightarrow n_0 = 500\,001$

tj. od 500 001 členu platí, že vzd. a_n členu od čísla $\frac{1}{2}$ je $< 10^{-6}$

$\Rightarrow$ pokud takové n_0 existuje, pak číslo $\frac{1}{2}$ nazýváme LIMITOU POSLOUPNOSTI

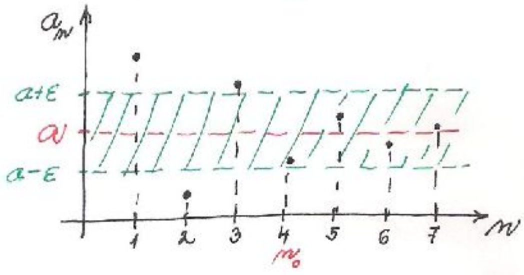
$$\lim_{n \to \infty} \frac{(-1)^n + n}{2n} = \frac{1}{2}$$

Def.

LIMITOU POSLOUPNOSTI $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ nazýváme REÁLNÉ ČÍSLO $\underline{a}$ $(a \in R) \Leftrightarrow$ ke každému kladnému reálnému číslu $\underline{\varepsilon}$ $(\varepsilon > 0)$ existuje přirozené číslo n_0 $(n_0 \in N)$ tak, že pro všechna přirozená čísla $n \geqq n_0$ platí, že $|a_n - a| < \varepsilon$ (tj. pro $\forall n \geqq n_0$ patří všechny členy do intervalu $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$)

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ (\varepsilon \in R) \ \exists n_0 \in N; \ \forall n \geqq n_0 : |a_n - a| < \varepsilon$ [tj: $a_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$]

ČTEME: limita a_n pro n jdoucí k nekonečnu se rovná $\underline{a}$ [limita a_n je a]



od $n \geqq n_0$

$n \geqq 4$ leží všechny členy a_n v pásu $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ [vzd. a_n od $a < \varepsilon$]

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$

Def.

POSLOUPNOST $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ nazýváme

- KONVERGENTNÍ $\Leftrightarrow$ MÁ LIMITU
- DIVERGENTNÍ $\Leftrightarrow$ NEMÁ LIMITU

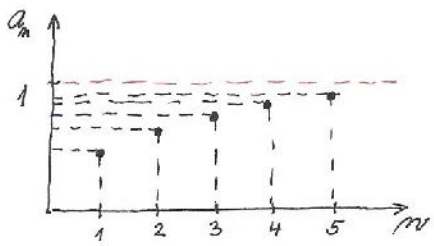
Věta

Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu.
Každá konvergentní posloupnost je omezená.

Příklady

② dokažte, že $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, $a_n = \frac{n}{n+1}$ je konvergentní

$a_1 = \frac{1}{2}, \ a_2 = \frac{2}{3}, \ a_3 = \frac{3}{4}, \ a_4 = \frac{4}{5}, \ a_5 = \frac{5}{6} \ (\doteq 0{,}83)$



$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in N: \forall n \geqq n_0: |a_n - 1| < \varepsilon$

tj: $\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| < \varepsilon$

$\left|\frac{n-n-1}{n+1}\right| < \varepsilon$

$\left|\frac{-1}{n+1}\right| < \varepsilon$

$\frac{1}{n+1} < \varepsilon$

$1 < n\varepsilon + \varepsilon$

$n\varepsilon > 1 - \varepsilon$

$n > \frac{1}{\varepsilon} - 1$

např.

$\varepsilon = 1 \Rightarrow n > 1 - 1$

$n > 0$, tj. $n_0 = 1$

tj. všechny členy a_n pro $n \geqq n_0$, tj. $n \geqq 1$ leží v pásu $\underset{a-\varepsilon,\ a+\varepsilon}{(1-1, 1+1)} = (0,2)$

nebo pro

$\varepsilon = 0{,}2 \Rightarrow n > \frac{1}{0{,}2} - 1$

$n > 5 - 1$

$n > 4$, tj. $n_0 = 5$

tj. všechny členy od a_5 počínaje leží v pásu $(1-0{,}2; \ 1+0{,}2) = (0{,}8; \ 1{,}2)$

nebo pro

$\varepsilon = 0{,}01 \Rightarrow n > \frac{1}{\frac{1}{100}} - 1$

$n > 99$, tj. $n_0 = 100$

$\Rightarrow$ pro $\forall n \geqq n_0$, tj. $n \geqq 100$ leží členy a_n v pásu $(1-0{,}01; \ 1+0{,}01) = (0{,}99; \ 1{,}01)$

tj. vzd. členů od $\underset{(=1)}{\underline{a}}$ je $<$ než $0{,}01$ (ε)

③ Dokažte, že $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n} \neq 2$, ale $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n} = 1$

[$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon>0\ \exists n_0\in N;\ \forall n\geq n_0: |a_n-a|<\varepsilon$]

a) ? $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n} = 2$

$\left|\frac{n+1}{n}-2\right| < \varepsilon$

$\left|\frac{n+1-2n}{n}\right| < \varepsilon$

$|a-b| = |b-a|$ $\quad \left|\frac{1-n}{n}\right| < \varepsilon$

$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$ $\quad \frac{|n-1|}{|n|} < \varepsilon$ ($n-1 \geq 0$, $|n|>0$)

$\frac{n-1}{n} < \varepsilon \quad | \cdot n>0$ nemění zn. nerov.

$n-1 < n\varepsilon$

$n - n\varepsilon < 1$

(*) $n(1-\varepsilon) < 1 \quad | : (1-\varepsilon)$ chci ?>0, <0 změna zn. nerv.

$1-\varepsilon>0$; $1>\varepsilon$; z def. $\varepsilon<1 \wedge \varepsilon>0$; $\underbrace{\varepsilon\in(0,1)}$ dělím v (*)

$n < \frac{1}{1-\varepsilon}$

$1-\varepsilon<0$; $1<\varepsilon \wedge \varepsilon>0$; $\underbrace{\varepsilon\in(1,+\infty)}$ dělíme v (*)

$n > \frac{1}{1-\varepsilon}$

pro $\varepsilon\in(0,1)$, např. $\varepsilon=0,6$

$\Rightarrow n < \frac{1}{1-0,6}\left(= \frac{1}{0,4} = \frac{1}{\frac{4}{10}} = \frac{10}{4} = 2,25\right)$

$\underbrace{n < 2,25 \wedge n\in N}_{n_0=2}$

do $n_0=2$ leží hodnoty (a_1, a_2) v pásu $(2-0,4;\ 2+0,4) = (1,6;\ 2,4)$, pro další n už neleží

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n} \neq 2$

pro $\varepsilon\in(1,+\infty)$, např.

$\varepsilon = 1,2 \Rightarrow$

$\Rightarrow n > \frac{1}{1-1,2} = \frac{1}{-0,2} = -\frac{1}{\frac{2}{10}}$

$n > -\frac{10}{2}$

$\underbrace{n > -\frac{5}{1} \wedge n\in N}_{n_0=1}$

všechny hodnoty a_n leží v pásu $(2-1,2;\ 2+1,2)$ $= (0,8;\ 3,2)$

b) ? $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n} = 1$

$a_1 = \frac{2}{1} = 2$

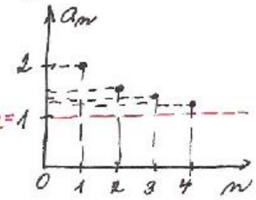
$a_2 = \frac{3}{2} = 1,5$

$a_3 = \frac{4}{3} = 1,3$

$a_4 = \frac{5}{4} = 1,25$

$a_5 = \frac{6}{5} = 1,2$

$\vdots$



? $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n} = 1$

$\left|\frac{n+1}{n}-1\right| < \varepsilon$

$\left|\frac{n+1-n}{n}\right| < \varepsilon$

$\left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon$

$\frac{|1|}{|n|} < \varepsilon$

$\frac{1}{n} < \varepsilon \quad | \cdot n>0$

$1 < n\varepsilon$

$n > \frac{1}{\varepsilon}$

např. $\varepsilon=3 \Rightarrow \underbrace{n>\frac{1}{3} \wedge n\in N}_{n_0=1}$

$\left(\forall n \geq \overset{n_0}{1}: \left|\frac{n+1}{n}-1\right| < 3\right)$

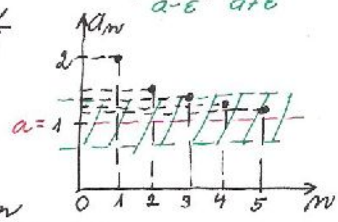
$|a_n - a| < \varepsilon$

např. $\varepsilon = \frac{1}{3} \Rightarrow n > \frac{1}{\frac{1}{3}} \wedge n\in N$

$n > 3$ ✓ $n_0 = 4$

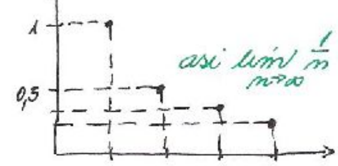
(tj. všechny členy od a_4 leží v pásu $\left(1-\frac{1}{3},\ 1+\frac{1}{3}\right)$)

$a-\varepsilon \quad a+\varepsilon$



④ Zjistěte, zda dané posloupnosti jsou konvergentní nebo divergentní, příp. určete limitu

a) $\left(\frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ $\left[a_1 = \frac{1}{1} = 1,\ a_2 = \frac{1}{2},\ a_3 = \frac{1}{3},\ a_4 = \frac{1}{4},\ \dots\right]$



asi $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$

[? $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right) = 0 \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists n_0\in N;\ \forall n\geq n_0: |a_n-a|<\varepsilon$]

$\left|\frac{1}{n}-0\right| < \varepsilon$

$\left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon$

$\frac{1}{n} < \varepsilon$

$1 < n\varepsilon$

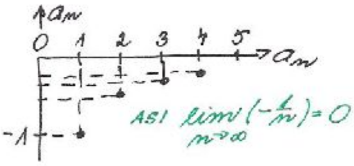
$n > \frac{1}{\varepsilon}$

např. $\varepsilon = 1 \Rightarrow \underbrace{n>1 \wedge n\in N}_{n_0=2} \Rightarrow$ všechny členy od a_2 leží v $(0-1,\ 0+1) = (-1, 1)$

$\varepsilon = \frac{1}{10} \Rightarrow n > 10$, tj. od a_{11} leží všechny členy v $\left(-\frac{1}{10},\ +\frac{1}{10}\right)$

VZOREC: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$

b) $\left(-\frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ $[a_1=-1\ \ a_2=-\frac{1}{2}\ \ a_3=-\frac{1}{3}\ \ a_4=-\frac{1}{4}\ \ a_5=-\frac{1}{5}\ldots$



ASI $\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n}\right)=0$

$\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n}\right)=0 \iff \forall\varepsilon>0\ \exists n_0\in N;\ \forall n\geqq n_0: |a_n-a|<\varepsilon$

$\left|-\frac{1}{n}-0\right|<\varepsilon$

$\left|-\frac{1}{n}\right|<\varepsilon$

$\frac{|-1|}{|n|}<\varepsilon$

$\frac{1}{n}<\varepsilon \quad | \cdot n_{>0}$

$1<n\varepsilon$

$n>\frac{1}{\varepsilon}$ (ke $\forall\varepsilon>0\ \exists n_0\in N$)

např. $\varepsilon=10^{-3} \Rightarrow n>\frac{1}{10^{-3}}=10^3$

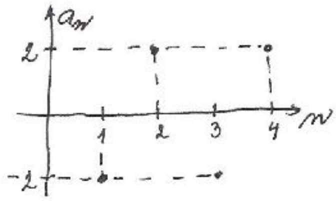
$\underbrace{n>1000 \wedge n\in N}_{n_0=1001}$

všechny členy od $n=1001$ leží v intervalu $(0-0{,}001;\ 0+0{,}001)=(-0{,}001;\ 0{,}001)$

$\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n}\right)=0$

c) $\left((-1)^n\cdot 2\right)_{n=1}^{\infty}$

$[a_1=-2\ \ a_2=+2\ \ a_3=-2\ \ a_4=+2\ \ldots]$



divergentní (a_n se neblíží k určité jedné hodnotě)

- kdyby ? $\lim (-1)^n\cdot 2=0$

$|2\cdot(-1)^n-0|<\varepsilon$

$|2\cdot(-1)^n|<\varepsilon$

$2\cdot\underbrace{|(-1)^n|}_{1}<\varepsilon$

$2<\varepsilon$

pro $\forall\ \varepsilon>2$ by všechny hodnoty a_n ležely v pásu $(0-2;\ 0+2)$, ale pro $\varepsilon<2$ ne $\Rightarrow$ má však platit pro $\forall\varepsilon>0$ $\Rightarrow$ lim neex.

obdobně: $\left((-1)^n\right)_{n=1}^{\infty}$ divergentní

d) $\left((-1)^n\cdot\frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}=\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$

$a_1=-\frac{1}{1}=-1\ \ a_2=\frac{1}{2}\ \ a_3=-\frac{1}{3}\ \ a_4=\frac{1}{4}\ \ a_5=-\frac{1}{5}$

? $\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{n}=0$

$\left|(-1)^n\cdot\frac{1}{n}-0\right|<\varepsilon$

$\left|\frac{(-1)^n}{n}\right|<\varepsilon$

$\frac{1}{n}<\varepsilon$

$n>\frac{1}{\varepsilon}$ ($\forall\varepsilon>0$ ex. n)

$\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{n}=0$

např. $\varepsilon=\frac{1}{3}\Rightarrow n>\frac{1}{\frac{1}{3}}$

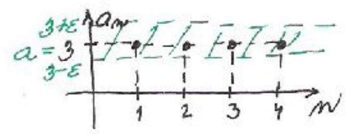
$\underbrace{n>3,\ n\in N}_{n_0=4}$

tj. od a_4 leží všechny členy v pásu (intervalu) $\left(0-\frac{1}{3},\ 0+\frac{1}{3}\right)=\left(-\frac{1}{3},\ \frac{1}{3}\right)$

VÝPOČTY ZDLOUHAVÉ – VIZ DALŠÍ ČLÁNEK

e) $(3)_{n=1}^{\infty}$

$a_1=3\ \ a_2=3\ \ a_3=3\ \ a_4=3\ \ldots$



$|a_n-3|<\varepsilon$

$|3-3|<\varepsilon$

$|0|<\varepsilon$

$\varepsilon>0$

$\lim_{n\to\infty} C=C$

$\forall\varepsilon>0\ \exists n_0\in N;\ \forall n\geqq n_0: |a_n-a|<\varepsilon$

ODVOZENÉ VZORCE

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0 \qquad \lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n}\right)=0$

$\lim_{n\to\infty} C=C$ (konstanta)

$\left((-1)^n\right)_{n=1}^{\infty}$ DIVERGENTNÍ ($\lim_{n\to\infty}(-1)^n$ neex.)

$\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{n}=0$